

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral de sens direct ABC . On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[CB]$ et soit $D = S_O(A)$

- 1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? justifier.
- 2) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur B et B sur D .
b- Justifier que f est une rotation et donner ses éléments caractéristiques.
c- Soit K le milieu du segment $[BD]$.
Prouver que le triangle CIK est équilatéral de sens direct.
- 3) Soit $g = f \circ S_{(AB)}$.
a- Quelle est la nature de g .
b- Déterminer $g \circ g(A)$.
a) Donner alors la nature et les éléments caractéristiques de g .
- 4) Soit (H) l'ensemble des isométries h qui transforment le triangle ABC en le triangle BCD et tel que $h(A) = C$.
a- Etudier la nature de h si $h(C) = B$.
b- Déterminer alors l'ensemble (H) .

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\pi x)}}$

- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, 1]$ une unique solution α .
- 4) Soit $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n^2 + k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n^2 + 1}\right) \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{2n^2}\right)$.
b- En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.



Exercice3(6points)

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} tel que $f(0) = 0$ et f' sa fonction dérivée définie sur \mathbb{R}

par $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{4x^2+1}}$.

La courbe (Cf) de f admet deux branches paraboliques de directions (xx') l'une au voisinage de $(-\infty)$ et l'autre au voisinage de $(+\infty)$.

- 1) a) Montrer que (Cf) admet un point d'inflexion.
b) Montrer que f est impaire (indication on pose $g(x) = f(x) + f(-x)$).
c) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.
d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$ et interpréter le résultat.
- 2) Dans l'annexe ci-jointe on a représenté La courbe (Cf) de f .
a) Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1} .
b) Tracer dans le même repère La courbe (ζ') de f^{-1} .
- 3) Soit h la fonction définie sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $h(x) = f\left(\frac{1}{2} \tan x\right)$.
a) Montrer que h est dérivable sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et calculer $h'(x)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in \left] \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4 \cos(c)}$.

Exercice4(5points)

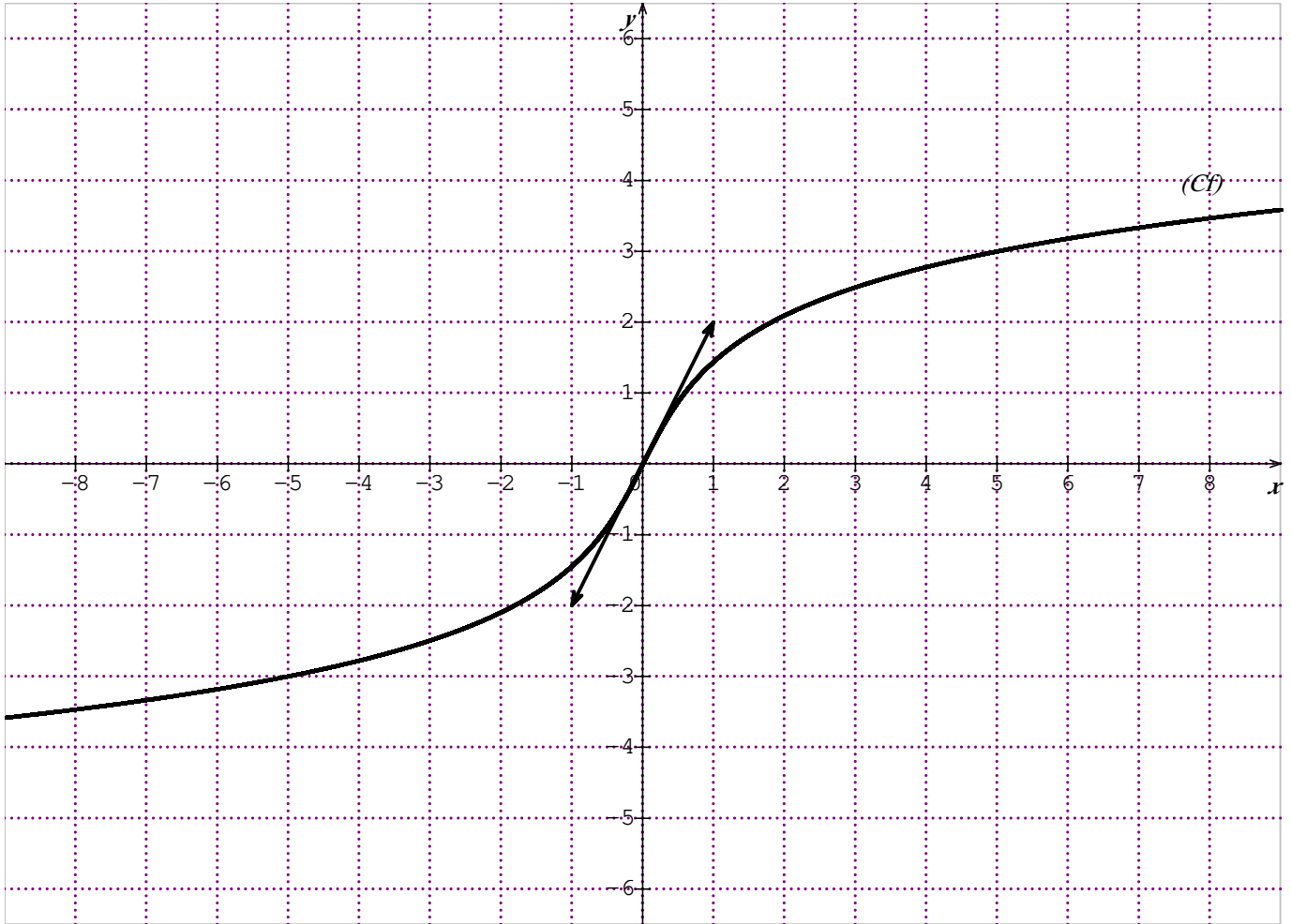
On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z + 1 + e^{i2\theta} = 0$, avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

- 1) Montrer que $z' = 1 - ie^{i\theta}$ est une solution de (E_θ) , déterminer alors l'autre solution z'' .
- 2) Soit $R = (O, \vec{U}, \vec{V})$ un repère orthonormé direct du plan A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $2, 1 - ie^{i\theta}$ et $1 + ie^{i\theta}$.
a) Montrer que les segments $[OA]$ et $[M_1 M_2]$ ont le même milieu, calculer $M_1 M_2$.
b) Montrer alors que $OM_1 AM_2$ est un rectangle.
c) Ecrire z' sous forme exponentielle .
d) Montrer que si $\theta = \pi$ alors $OM_1 AM_2$ est un carré.
- 3) Pour $\theta = \pi$, Déterminer l'ensemble (E) de toutes les isométries qui laissent globalement invariant le segment $[OA]$.



Annexe (Exercice 3)

Nom & prenom :



Exercice 3 : (4 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct on considère un triangle équilatéral de sens direct ABC. On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC] et soit $D = S_O(A)$.

- 0,5 1) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.
- 0,5 2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en B et B en D.
0,75 b) Justifier que f est une rotation et donner ces éléments caractéristiques.
0,5 c) Soit K le milieu du segment [BD].
Prouver que le triangle CIK est équilatéral de sens direct.
- 3) Soit $g = f \circ S_{(AB)}$.
- 0,25 a) Quelle est la nature de f.
0,25 b) Déterminer $g \circ g(A)$.
0,5 Donner alors la nature et les éléments caractéristiques de g.
- 4) Soit (H) l'ensemble des isométries h qui transforment le triangle ABC en le triangle BCD et tel que $h(A) = C$.
- 0,5 a) Etudier la nature de h si $h(C) = B$.
0,5 b) Déterminer alors (H) .

